



TITLE:

移動型 Discrete Breather の共鳴現象(非線形波動の数理解と応用)

AUTHOR(S):

吉村, 和之

CITATION:

吉村, 和之. 移動型 Discrete Breather の共鳴現象(非線形波動の数理解と応用). 数理解析研究所講究録 2006, 1483: 240-251

ISSUE DATE:

2006-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/58083>

RIGHT:

移動型 Discrete Breather の共鳴現象

NTT コミュニケーション科学基礎研究所 吉村 和之 (Kazuyuki Yoshimura)
NTT Communication Science Laboratories

1 はじめに

非線形格子系においては、系の離散性と非線形性に起因して、空間的に局在した振動モードが存在し得ることが知られている。この局在モードは、Discrete Breather (DB), または, Intrinsic Localized Mode (ILM) と呼ばれている。DB の存在は武野らにより最初に指摘され [1, 2], 以来, DB に関する多数の研究がなされている (レビュー論文 [3, 4] 参照)。DB の特徴としては, (i) 非可積分な格子系で存在し得る点, (ii) 1 次元系に限らず 2 or 3 次元の格子系で存在する点, および, (iii) 保存系に限らず散逸系でも存在する点などが挙げられる。これらの特徴により, DB の存在は普遍的な現象であると言える。

これまでの研究では, 主として, 格子上の一箇所に留まり内部振動を続ける定在型 DB が調べられてきた。定在型 DB は空間的に局在した時間周期解であり, 種々の格子系に関して, その存在証明が既に与えられている。例えば, 非線形 Klein-Gordon 格子 [5], 偶数次の同次相互作用ポテンシャルを持つ格子 [6], 2 粒子 Fermi-Pasta-Ulam (FPU) 格子 [7] に対して証明が与えられている。また, 非可積分系の解であるので一般には DB の解析解は求まらないが, いくつかの特殊な格子系については, 定在型 DB の厳密解も得られている [8, 9]。さらに, 定在型 DB に関しては, DB 解が存在するための系の条件 [10, 11] や, その線形安定性 [5, 4, 12, 13, 14] 等も調べられている。

一方, 数値実験においては, 長時間にわたってほとんど減衰せずに格子上を移動する局在モードが観測されている。Fermi, Pasta, Ulam による数値実験 [15] 以来, 平衡統計力学の基礎付けの問題に関連して, 非平衡な初期条件から平衡状態への緩和過程に関する数値実験が格子系に対して多数行なわれてきた。特に初期条件として高波数のフォノンモードを与えた場合に, フォノンモードの変調不安定により局在励起構造が形成される。変調不安定により生成された多数の局在モードが, 格子上を移動と衝突を繰り返しながら平衡状態に近づく現象が観測されている [16, 17, 18, 19]。格子系の変調不安定性に関しては, 文献 [20, 21, 22, 23, 24] で論じられている。数学的証明は無いが, 数値実験結果は全く減衰しない厳密な移動型 DB 解の存在を示唆しているものと思われる。緩和過程において観測される局在モードも, 無減衰の移動型 DB の近似解であろうと考えられる。しかしながら, そのような厳密な移動型 DB 解に関する研究は少なく, 波動としての基本的性質の理解は充分になされていない。文献 [25] では, Salerno 系について移動型 DB の数値計算結果が示されている。Salerno 系 [26] とは 1 つのパラメータを含む格子モデルであり, 可積分系である Ablowitz-Ladik 格子 [27] と離散非線形 Schrödinger 格子を両極限として持つ。Ablowitz-Ladik 格子のソリトン解を初期解とし, パラメータに関し数値的に解を延長することにより移動型 DB 解が計算されている。文献 [28] では, 非線形 Klein-Gordon 格子について移動型 DB 解が計算されている。現在のところ, 移動型 DB の計算はこれらのモデルに限られており, FPU 格子等その他多くの格子モデルに関する計算は未だなされていない。移動型 DB の特徴としては, 局在性が破れ空間的に広がった裾が存在する点で定在型 DB とは異なる波形を持つことが, 文献 [25, 28] の数値計算

により指摘されている, 移動型 DB に関する基本的問題の一つとして, 波形と安定性の周波数・速度パラメータに対する依存性が挙げられる. しかし, この依存性については現在のところ全く知られていない. 本稿では, FPU 格子の厳密な移動型 DB 解の計算結果を初めて示すとともに, 波形と安定性の周波数・速度パラメータに対する依存性において一種の共鳴現象が生じることを明かにする. なお, 移動型 DB の衝突過程の理解も重要な課題の一つと考えられる. これに関しては, 近似的な移動型 DB 解を用いた詳細な数値実験が文献 [29] でなされている. しかし, 衝突過程の完全な解明には至っておらず, 今後の更なる研究が必要と思われる.

2 格子モデルとフォノンモード

以下のハミルトニアンで定義される 1 次元非線形格子を扱う.

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N p_n^2 + \sum_{n=1}^N U(q_n - q_{n-1}) \quad (1)$$

式中の q_n は粒子の変位, p_n は運動量を表す. $U(X)$ は粒子の相互作用ポテンシャル関数であり, 次式で与えられるとする.

$$U(X) = \frac{1}{2}X^2 + \frac{\beta}{4}X^4 \quad (2)$$

この格子モデルは, FPU- β 格子と呼ばれている. (2) 式で, β は非線形性の強さを表すパラメータであり, 以下では $\beta = 1$ とする. 格子サイズ N は偶数とし, 周期境界条件 $q_{n+N} = q_n$ を仮定する. ハミルトニアン (1) より, 運動方程式は次式で与えられる.

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} = q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n + \beta \left[(q_{n+1} - q_n)^3 - (q_n - q_{n-1})^3 \right]. \quad (3)$$

後の数値計算結果の図示に用いるための物理量として, サイトエネルギー e_n , $n = 1, 2, \dots, N$ を次式で定義する.

$$e_n = \frac{1}{2}p_n^2 + \frac{1}{2} \left[U(q_n - q_{n-1}) + U(q_{n+1} - q_n) \right] \quad (4)$$

e_n は, n 番目の粒子の運動エネルギーと隣接粒子との相互作用ポテンシャルの半分の和であり, n 番目の粒子の持つエネルギーと見なし得る物理量である.

次に, フォノンモードを定義しておく. 座標変換 $q = (q_1, \dots, q_N) \mapsto Q = (Q_{-(N/2-1)}, \dots, Q_{N/2})$ を次式の直交変換により定義する.

$$q_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{N}} \sum_{m=-(N/2-1)}^{N/2} Q_m \left[\cos\left(\frac{2\pi}{N}mn\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{N}mn\right) \right], \quad (n = 1, 2, \dots, N), \quad (5)$$

Q_m が m 番目のフォノンモードの振幅を表す変数であり, 新座標 Q をフォノン座標と呼ぶ. m 番目のフォノンモードの固有振動数 ω_m は,

$$\omega_m = 2 \cos\left(\frac{\pi m}{N}\right) \quad (6)$$

で与えられる. 最も高い振動数を持つ $m = 0$ に対応するモードは, Zone Boundary Mode (ZBM) と呼ばれる. フォノン座標 Q と共役な運動量 $P (= \dot{Q})$ を用いると, ハミルトニアン (1) は以下の様に書か

れる。

$$H = \frac{1}{2}P_{N/2}^2 + \frac{1}{2} \sum_{m=-N_h}^{N_h} (P_m^2 + \omega_m^2 Q_m^2) + \frac{\beta}{8N} \sum_{i,j,k,l=-N_h}^{N_h} \omega_i \omega_j \omega_k \omega_l Q_i Q_j Q_k Q_l D(i, j, k, l), \quad (7)$$

ここで、 $N_h = N/2 - 1$ であり、 $D(i, j, k, l)$ はフォノンモード間の結合則を表す係数である。係数 $D(i, j, k, l)$ は、以下の様に与えられる。

$$D(i, j, k, l) = -\Delta(i+j+k+l) + \Delta(i+j-k-l) + \Delta(i-j+k-l) + \Delta(i-j-k+l), \quad (8)$$

ただし、 Δ は次式で定義されとする。

$$\Delta(r) = \begin{cases} (-1)^m & \text{if } r = mN, (m \in \mathbb{Z}), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (9)$$

ハミルトニアン (7) において、全粒子の並進運動を表す $N/2$ のモードは分離されている。したがって、 $(Q_{N/2}, P_{N/2})$ は循環座標であり、以下では $Q_{N/2} = P_{N/2} = 0$ と仮定しておく。 m 番目のフォノンモードに関する運動方程式は、以下の様に与えられる。

$$\frac{d^2}{dt^2} Q_m + \omega_m^2 Q_m + \frac{\beta}{2N} \sum_{i,j,k=-N_h}^{N_h} \omega_m \omega_i \omega_j \omega_k Q_i Q_j Q_k D(m, i, j, k) = 0, \quad (10)$$

ただし、 $m = -(N/2 - 1), \dots, N/2 - 1$ である。

(6) 式より、 $\omega_m = \omega_{-m}$ が分かる。 m 番目のモードと $-m$ 番目のモードは同一の固有振動数を持つので、これらの2つのモードは同等に扱う。 m 番目と $-m$ 番目のモードの調和エネルギーの和 E_m をモードエネルギーと呼ぶことにする。 E_m , $m = 0, 1, \dots, N/2 - 1$ は、次式で定義される。

$$E_m = \frac{1}{2} (P_m^2 + \omega_m^2 Q_m^2) + \frac{1}{2} (P_{-m}^2 + \omega_{-m}^2 Q_{-m}^2) \quad (11)$$

移動型 DB の共鳴現象を調べる際に、ここで定義したモードエネルギーを用いる。

3 有理数速度 DB と数値計算法

定在型 DB には、対称性のことなる2つのモードが存在することが知られている。1つは、odd モードまたは Sievers-Takeno モード [1, 2] と呼ばれ、他のモードは、even モードまたは Page モード [12] と呼ばれている。図 1 に、最も局在性が強い極限での (a) odd モードと (b) even モードの変位パターンを示す。図 1 の変位パターン例は、内部振動数 ω が無限大の極限に対応している。 ω が小さくなるに従い DB の局在性は弱くなる。 odd モードでは局在振動の中心が格子点上になり、その振幅分布は、中心の振幅を 1 に規格化したとき、近似的に $(\dots, 0, -1/2, 1, -1/2, 0, \dots)$ となる。一方、even モードでは局在振動の中心が格子点の中間にあり、その規格化された振幅分布は、近似的に $(\dots, 0, -1, 1, 0, \dots)$ となる。これらの定在型モードにおいては、図 1 中の矢印で示す様に隣接する粒子は互いに反位相で振動を行なう。この振動を内部振動と呼ぶことにする。ポテンシャルの非線形性により、内部振動の周期 T は DB の振幅に依存する。移動型 DB の場合は、ある瞬間には odd モードに近い形を取り、続いて odd と even の中間的な形を取り、その後には even モードに近い形を取るという過程を繰り返しながら格子点を伝播して行く。

移動型 DB の速度 V を、内部振動周期 T あたりに DB が移動する格子間隔数として定義する。この速度 V が、

$$V = \frac{m}{n} \quad (\text{site/period}), \quad m, n \in \mathbb{N} \quad (12)$$

の様に有理数となる DB を、ここでは有理数速度 DB と呼ぶことにする。(12) 式は、内部振動周期の n 倍の時間、すなわち nT の間に、DB の位置が m 格子点だけ移動することを意味している。現在のところ、任意の速度に対して厳密な移動型 DB を求める数値計算法は知られていない。しかしながら、有理数速度 DB の場合には、以下に述べるように、精度の良い初期近似解を得ることができたならば、Newton 法を用いて数値計算精度の範囲内で厳密な移動型 DB を求めることが出来る。

内部振動数 $\omega = 2\pi/T$ 、および、速度 $V = m/n$ が与えられているとする。有理数速度 DB の数値計算は以下の手順にて行なわれる。

Step 1 与えられた内部振動数 ω を持つ定在型 DB の近似解を解析的に計算する。

Step 2 Step 1 で求めた解を初期近似解として用い、Newton 法により高精度の定在型 DB の数値解を計算する。

Step 3 Step 2 で求めた定在型 DB の数値解に摂動を加えて、与えられた速度 V を持つ移動型 DB の数値的近似解を計算する。

Step 4 Step 3 で求めた近似解を初期近似解として用い、Newton 法により高精度の移動型 DB の数値解を計算する。

Step 1 における定在型 DB の解析的近似解は既に求められている [30] ので、それを利用して Step 2 の計算を実行することが可能である。一方、定在型 DB の数値計算に関しては、解析的近似解を必要としない方法も知られている [31]。文献 [31] の anti-integrable limit から解を数値的に延長する方法を用いて、Step 2 における数値解を求めることも可能である。

移動型 DB の数値計算においては、Step 3 における近似解の構成が決定的に重要である。実際に数値計算を行ってみると、Step 4 の Newton 法の収束領域が極めて狭いことが分かる。したがって、移動型 DB の非常に精度の良い解を Step 3 で求めることが必要となる。ある種のオンサイトポテンシャルを持つ非線形 Klein-Gordon 格子については、精度の良い移動型 DB の近似解を作るための摂動を定める方法が Chen 等により示されている [32]。彼等の方法では、定在型 DB 解に付随する Floquet 行列のある特定の特性乗数に対する固有ベクトルを数値的に計算することにより、摂動方向を定めている。彼等の方法が FPU 格子の場合にも適用できるか否かは不明である。詳細は省略するが、本研究では、Floquet 行列の数値計算を必要とせず、より簡単に摂動方向を求める手法を与えた。後節の数値計算結果は、この新手法を用いて計算されたものである。

最後に Step 4 の Newton 法について述べる。与えられた ω と $V = m/n$ に対する移動型 DB 解の初期条件を、 $(q(0), p(0)) = (q_1(0), \dots, q_N(0), p_1(0), \dots, p_N(0))$ とする。 $(q(0), p(0))$ を初期条件として運動方程式 (3) を時間 $nT = 2\pi n/\omega$ に渡り積分すると、 $(q(nT), p(nT)) = (q_1(nT), \dots, q_N(nT), p_1(nT), \dots, p_N(nT))$ が定まる。このとき、写像 $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を以下の様に定める。

$$F(q_1(0), \dots, q_N(0), p_1(0), \dots, p_N(0)) = (q_1(nT), \dots, q_N(nT), p_1(nT), \dots, p_N(nT)) \quad (13)$$

有理数速度 DB の場合、初期条件と F による像の間に条件が課せられる。 m が偶数の場合には、時刻 $t = nT$ における粒子の変位パターンは、 $t = 0$ の変位パターンを m 格子点平行移動したものと一致しな

なければならない。一方、 m が奇数の場合には、時刻 $t = nT$ での変位パターンは、 $t = 0$ の変位パターンを m 格子点平行移動し、さらに各粒子の位相を反転たものと一致しなければならない。すなわち、初期条件 $(q(0), p(0))$ は、以下の条件式を満たさなければならない。

$$F(q_1(0), \dots, q_N(0), p_1(0), \dots, p_N(0)) = (-1)^m \cdot (q_{1-m}(0), \dots, q_{N-m}(0), p_{1-m}(0), \dots, p_{N-m}(0)) \quad (14)$$

周期境界条件を課しているので、変数の添字が負の場合は、その値に N を加えた添字を意味するものとする。(14)式は、初期条件を表す $2n$ 個の変数 $(q(0), p(0))$ に関する方程式と見なすことができる。したがって、(14)式の近似解が求まった場合には、Newton法により精度良く解 $(q(0), p(0))$ を求めることができる。Newton法の計算では、写像 F とそのJacobi行列 DF が必要となる。それらは、運動方程式(3)とその線形化方程式を数値積分することにより求まる。

4 数値計算結果

4.1 移動型 DB の計算例

図2に、格子サイズ $N = 60$ 、速度 $V = 1/3$ の場合の移動型DBの数値計算例を示す。図(a)-(c)は $\omega = 2.5$ 、図(d)は $\omega = 2.53$ に対する結果である。図(a)には、サイトエネルギーをサイト番号 n および時間 t の関数として示した。エネルギーの局在した部分が一定速度で移動しており、前節で述べた数値計算法を用いて移動型DBが正確に計算できていることが確認できる。図(b)は、同じ計算例のある時刻における変位パターンである。定在型DBのoddモードに近い変位であるが、DBの中心から離れた粒子にも僅かな変位が見られる。同じ時刻のサイトエネルギーを対数尺で表示したものが図(c)である。実線が移動型DBに関する結果を表す。DBの中心に近い部分では、中心からの距離に従い指数関数的にサイトエネルギーが減少している。一方、中心から離れた部分では、サイトエネルギーは減少せず、ほぼ一様な分布が観測される。定在型DBの場合には、サイトエネルギーは、破線の如く単調に指数関数的減少をすることが知られている。従って、図2(a)-(c)に示した結果は、移動型DBの特徴として、波形の局在性が破れ空間的に広がった裾が存在することを示している。このような、移動型DBにおける裾の存在は、他の格子系に対する数値計算においても観測されている[25, 28]。図(d)は、内部振動数が僅かに異なる場合の変位パターンである。図(a)-(c)の計算例と比較して、内部振動数の差は僅かであるにもかかわらず、裾の振幅が著しく増大しているのが分かる。これらの計算例は、移動型DBの波形に関して、内部振動数と速度パラメータに強く依存した裾振幅の変化が生じる事を示唆している。以下では、裾振幅のパラメータ依存性を論じる。

4.2 共鳴現象と共鳴条件

裾の大きさを定量化するために、移動型DBの中心粒子のサイトエネルギー e_{max} と裾部分の平均サイトエネルギー e_{tail} の比 e_{tail}/e_{max} を用いる(図2(c)参照)。図3は、裾の大きさと速度 V の関係を示している。パラメータ値は、格子サイズ $N = 40$ 、内部振動数 $\omega = 2.4$ である。横軸は速度の逆数 $1/V$ 、縦軸は e_{tail}/e_{max} を表す。裾の大きさは、速度に対して単調に依存するのではなく、複雑な依存性を示すことが分かる。しかし、大まかには、速度の減少に従って裾の大きさも減少する傾向が確認できる。この点については、速度減少に従い移動型DBの波形は定在型DBの波形に近づくはずであるので、自然な傾向として理解できる。

次に、速度一定の条件下で、裾の大きさの内部振動数 ω への依存性に関する結果を示す。図 4(a)-(c) は、格子サイズ $N = 40$ 、速度 (a) $V = 1/3$, (b) $V = 1/5$, (c) $V = 1/7$ の場合の計算結果である。横軸は内部振動数 ω 、縦軸は e_{tail}/e_{max} を表す。図より、裾の大きさが ω に強く依存して複雑に変化する様子が分かる。まず、図 4(a) においては、大まかには ω の増加に伴い裾の大きさが増大する傾向が現れている。 ω が大きい程 DB のコアの部分は強く局在するので、移動型 DB のコアの局在性が強くなるに従い裾が大きくなる傾向があると言える。さらに、著しい特徴として、図 4(a) は、離散的な特定の ω の値に対して裾が急激に増大する共鳴現象が生じる事を示している。次に、図 4(b), (c) に着目する。離散的な ω の値における共鳴現象が同様に観測される。よって、共鳴現象は、速度 V の値に依らず生じる移動型 DB の普遍的特徴の一つであると言える。なお、共鳴点に対応する ω の値は、速度 V に依存して異なっている。図 (b), (c) において、 ω の小さい領域では e_{tail}/e_{max} は平均的に ω と共に増加しているが、特定の ω 値において急激な減少が見られる。図 (b) の $V = 1/5$ の場合には $\omega \simeq 2.5$ で、図 (c) の $V = 1/7$ の場合には $\omega \simeq 2.3$ と $\omega \simeq 2.8$ で減少が見られる。以上の数値計算結果をまとめると、移動型 DB の ω と e_{tail}/e_{max} の関係を表す共鳴曲線の基本パターンは、図 5 の様になる。すなわち、共鳴による鋭いピークが存在し、ピークを除く平均的な e_{tail}/e_{max} の変化部分は点線の様に増加と急減少を繰り返すと言える。以下では、共鳴が起こる原因に関して議論する。

共鳴現象の原因を理解するために、モードエネルギーの計算を行なった。図 6 に、共鳴点と非共鳴点におけるモードエネルギー分布を示す。パラメータ値は、 $N = 40$, $V = 1/3$ である。横軸はモード番号 m 、縦軸は (11) で定義される E_m を表す。共鳴点 $\omega = 2.41$ と非共鳴点 $\omega = 2.35$ に対するモードエネルギー分布を、それぞれ、実線と破線で示してある。挿入図には、共鳴曲線における $\omega = 2.35, 2.41$ の位置を示してある。2つのモードエネルギー分布を比較すると、非共鳴点に対する分布ではモード番号 m の増加に従い単調に E_m も減少するのに対し、共鳴点に対する分布では特定のフォノンモード ($m = 6$) が著しく強く励起されているのが分かる。この結果より、共鳴による移動型 DB の裾振幅の増大は、特定のフォノンモードの励起によるものであると考えられる。他の共鳴点に対するモードエネルギー分布の結果を、図 7 に示す。特定のフォノンモードが強く励起されているのが確認できる。 $\omega = 2.69$ の場合については、 $m = 4$ と $m = 5$ の2つのモードが励起されているが、これは固有振動数 ω_4 と ω_5 の値が近いからと思われる。

フォノン座標における運動方程式 (10) において、非線形項の部分に移動型 DB の近似解を代入して共鳴項を探すことにより、以下の近似的共鳴条件を見出すことができる。

$$(1 - kV)\omega = \omega_m \quad (15)$$

ここで、 k は自然数、 ω は DB の内部振動数、 ω_m は $\pm m$ 番目のフォノンモードの固有振動数を表す。(15) 式を近似的に満たす ω_m を持つフォノンモードのエネルギーが共鳴により増大する。(15) 式は、DB の内部振動数 ω と DB の移動により生じる振動数 $V\omega$ の一次結合が、フォノンモードの固有振動数に一致するときに共鳴が生じることを意味している。図 7 に示した場合について、具体的数値を (15) 式に代入し両辺の値を比較すると以下の様になる。 $\omega = 2.255$ の場合、(左辺) $\simeq 1.503$, (右辺) $= \omega_8 \simeq 1.618$ 。 $\omega = 2.410$ の場合、(左辺) $\simeq 1.607$, (右辺) $= \omega_7 \simeq 1.705$ 。 $\omega = 2.560$ の場合、(左辺) $\simeq 1.707$, (右辺) $= \omega_6 \simeq 1.782$ 。 $\omega = 2.690$ の場合、(左辺) $\simeq 1.793$, (右辺) $= \omega_4 \simeq 1.902$ 。ここで、 $k = 1$ として計算を行なった。以上の比較より、左辺と右辺の良一致が確認できる。よって、共鳴条件 (15) は、少なくとも近似的には正しいと考えられる。

共鳴条件 (15) に基づき、共鳴曲線のピークを除く e_{tail}/e_{max} の平均部分の急減少に対する説明を試みる。共鳴条件 (15) で、 k を固定して考える。DB の内部振動数 ω が増加すると、共鳴を起こす ω_m も増

加ししなければならない。一方、分散関係式 (6) より ω_m は有界であり、 $0 \leq \omega_m \leq 2$ を満たす。従って、 $\omega > 2/(1-kV)$ のとき、考えている k の値に対し共鳴条件を満たす事は不可能となる。この共鳴条件の破れが、 $\omega = 2/(1-kV)$ において e_{tail}/e_{max} の平均部分の急減少を引き起こす原因と考えられる。また、一旦減少した後に再び共鳴が生じるのは、 $k+1$ に対する共鳴条件を満たすことによると考えられる。実際、具体的数値を (15) 式に代入し ω の値を計算すると、数値計算結果との良い一致が得られる。図 4(b) の $V = 1/5$ の場合、 $k = 1$ に対し $\omega = 5/2 = 2.5$ を得る。同様に、図 4(c) の $V = 1/7$ の場合、 $k = 1$ に対し $\omega = 7/3 \simeq 2.33$ 、 $k = 2$ に対し $\omega = 14/5 = 2.8$ を得る。いずれの理論値も、図 4(b),(c) の数値計算結果と良く一致する。これらの一致は、共鳴条件 (15) に基づく説明の妥当性を支持していると思われる。

4.3 共鳴現象と移動型 DB の安定性

移動型 DB の線形安定性に関する結果を示す。有理数速度 DB は、位相空間内において周期軌道を形成する。従って、その周期軌道に沿う変分方程式の Floquet 行列の固有値を数値的に調べることで、安定性を調べることができる。結果の一例を図 8 に示す。パラメータ値は、 $N = 40$ 、 $V = 1/3$ である。横軸は内部振動数 ω であり、影を付けた ω の区間が、移動型 DB が不安定となる振動数区間を表す (図に示した区間以外にも非常に狭い不安定区間が多数存在するが、それらは描いていない)。これより、共鳴現象は安定性と密接に関係しており、共鳴が起こる場合に DB が不安定化することが分かる。また、 ω の大きな領域で、不安定区間が広がる傾向が見られる。すなわち、コアの局在性が強い移動型 DB ほど不安定化し易いと言える。

5 結論

有理数速度を持つ移動型 DB の数値計算法、特に Newton 法における初期近似解の簡便な構成法を与えた。FPU- β 格子について、数値計算により有理数速度 DB の性質を調べた。以下の性質が明らかになった。

- 移動型 DB では局在性が破れ、空間的に広がった裾が現れる。
- 裾の大きさは、移動型 DB とフォノンモードとの共鳴現象に起因して、内部周波数 ω と速度 V に複雑に依存する。共鳴点では、裾の大きさが著しく増大する。
- 非共鳴な場合には移動型 DB は安定に伝播するが、共鳴点付近のパラメータ条件下では移動型 DB は不安定化する。また、コアの局在性が強い移動型 DB ほど不安定化し易い傾向がある。

さらに、運動方程式より共鳴条件を見出した。この共鳴条件と数値計算結果の比較を行なった結果、良い一致が確認できた。共鳴条件 (15) は、少なくとも近似的には正しいと考えられる。

参考文献

- [1] S. Takeno, K. Kisoda, and A. J. Sievers, Prog. Theor. Phys. Suppl. **94**, 242 (1988).
- [2] A. J. Sievers and S. Takeno, Phys. Rev. Lett **61**, 970 (1988).
- [3] S. Flach and C. Willis, Phys. Rep. **295**, 181 (1998).

- [4] S. Flach and A. Gorbach, *Chaos* **15**, 015112 (2005).
- [5] R. S. Mackey and S. Aubry, *Nonlinearity* **7**, 1623 (1994).
- [6] S. Flach, *Phys. Rev. E* **51**, 1503 (1995).
- [7] R. Livi, M. Spicci, and R. S. Mackey, *Nonlinearity* **10**, 1421 (1997).
- [8] A. A. Ovchinnikov and S. Flach, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 248 (1999).
- [9] A. Lahiri, S. Panda, and T. K. Roy, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3570 (2000).
- [10] K. W. Sandusky, and J. B. Page, *Phys. Rev. B* **50**, 866 (1994).
- [11] S. Flach, *Physica D* **91**, 223 (1996).
- [12] J. B. Page, *Phys. Rev. B* **41**, 7835 (1990).
- [13] K. W. Sandusky, J. B. Page, and K. E. Schmidt, *Phys. Rev. B* **46**, 6161 (1992).
- [14] O. A. Chubykalo, A. S. Kovalev, and O. V. Usatenko, *Phys. Lett. A* **178**, 129 (1993).
- [15] E. Fermi, J. Pasta, and S. Ulam, *Collected Papers of E. Fermi*, edited by E. Segré (University of Chicago, Chicago, 1965).
- [16] V. M. Burlakov, S. A. Kiselev, and V. I. Rupasov, *Phys. Lett. A* **147**, 130 (1990).
- [17] T. Cretegny, T. Dauxois, S. Ruffo, and A. Torcini, *Physica D* **121**, 109 (1998).
- [18] Y. A. Kosevich and S. Lepri, *Phys. Rev. B* **61**, 299 (2000).
- [19] K. Ullmann, A. J. Lichtenberg, and G. Corso, *Phys. Rev. E* **61**, 2471 (2000).
- [20] N. Budinsky and T. Bountis, *Physica D* **8**, 445 (1983).
- [21] P. Poggi and S. Ruffo, *Physica D* **103**, 251 (1997).
- [22] I. Daumont, T. Dauxois, and M. Peyrard, *Nonlinearity* **10**, 617 (1997).
- [23] K. Yoshimura, *Phys. Rev. E* **62**, 6447 (2000).
- [24] K. Yoshimura, *Phys. Rev. E* **70**, 016611 (2004).
- [25] J. Gómez-Gardeñes, F. Falo and L.M. Floría, *Phys. Lett. A* **332**, 213 (2004).
- [26] M. Salerno, *Phys. Rev. A* **46**, 6856 (1992).
- [27] M. J. Ablowitz and J. F. Ladik, *J. Math. Phys.* **17**, 1011 (1977).
- [28] S. Aubry and T. Cretegny, *Physica D* **119**, 34 (1998).
- [29] Y. Doi, *Phys. Rev. E* **68**, 066608 (2003).

[30] K. Yoshimura, (unpublished).

[31] J. L. Marin and S. Aubry, Nonlinearity **9**, 1501 (1996).

[32] D. Chen, S. Aubry, and G. P. Tsironis, Phys. Rev. Lett. **77**, 4776 (1996).

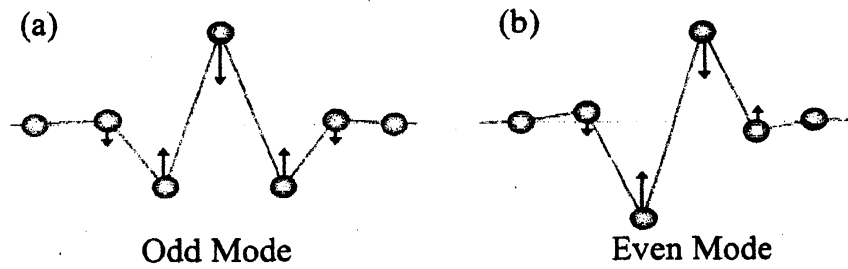


図 1: 定在型 DB の概形.

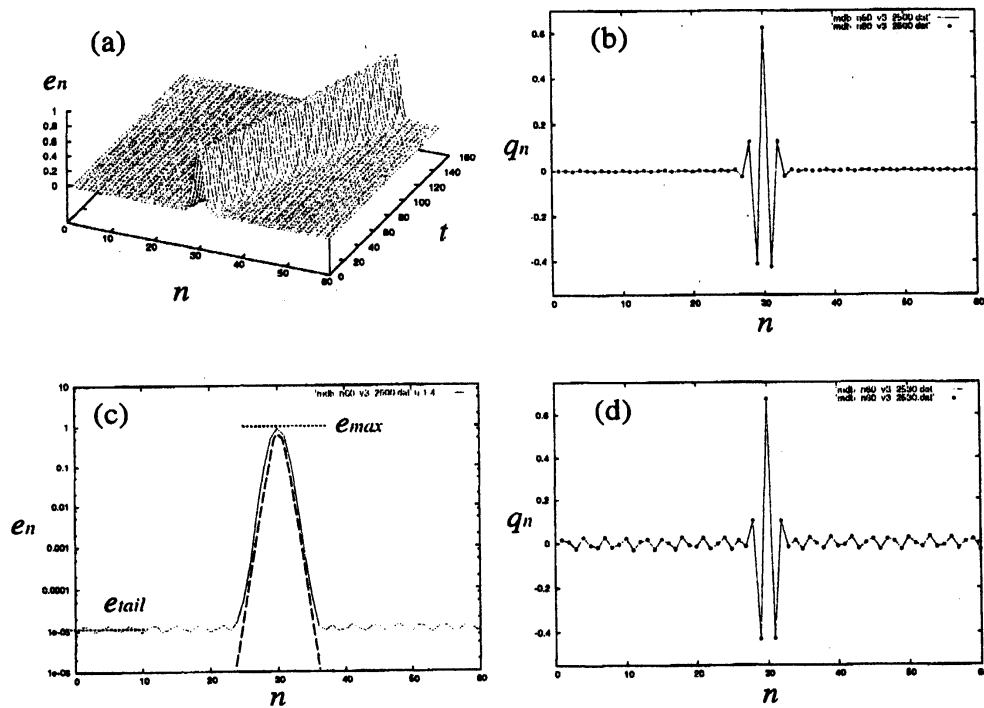


図 2: 移動型 DB の計算例 ($N = 60$, $V = 1/3$): (a)-(c) $\omega = 2.5$, (d) $\omega = 2.53$.

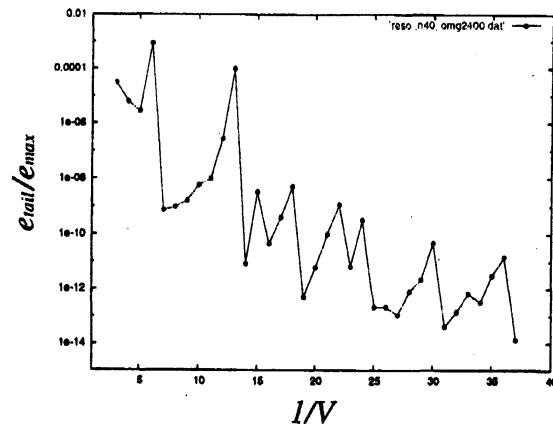


図 3: 移動型 DB の裾の大きさと速度の関係 ($N = 40$, $\omega = 2.4$).

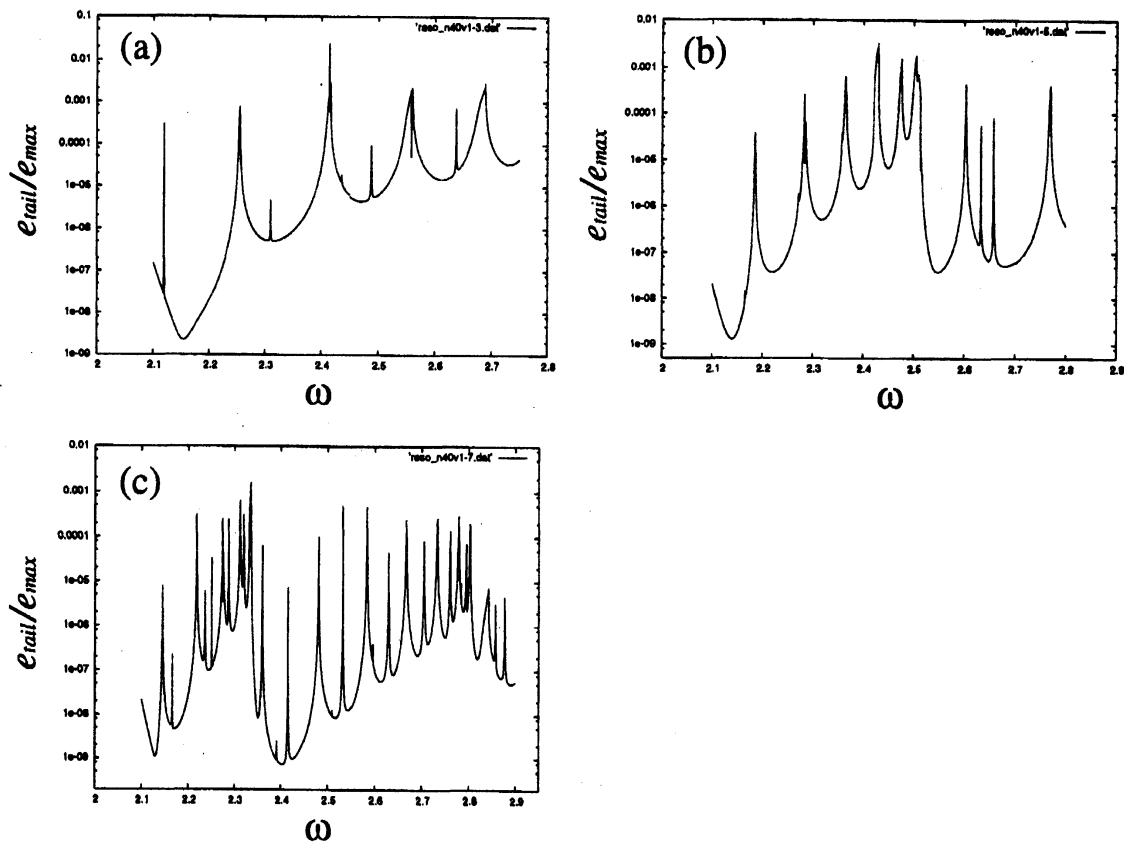


図 4: 移動型 DB の裾の大きさと内部振動数の関係 ($N = 40$): (a) $V = 1/3$, (b) $V = 1/5$, (c) $V = 1/7$.

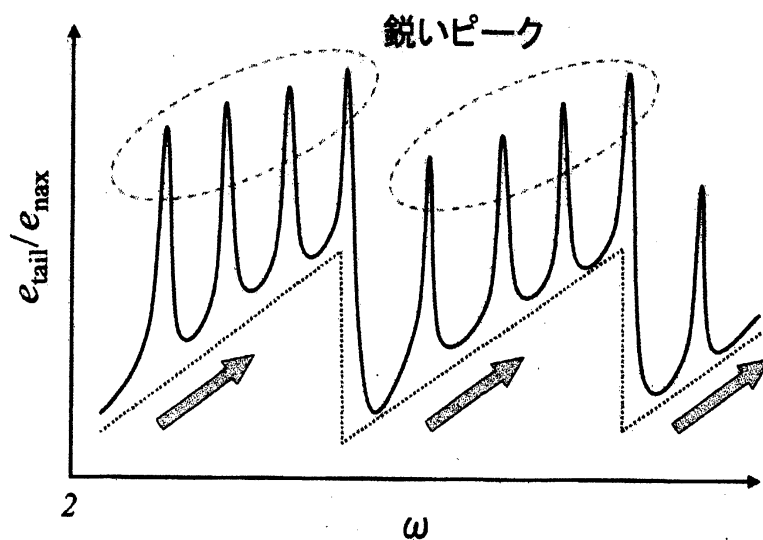


図 5: 共鳴曲線の基本パターン

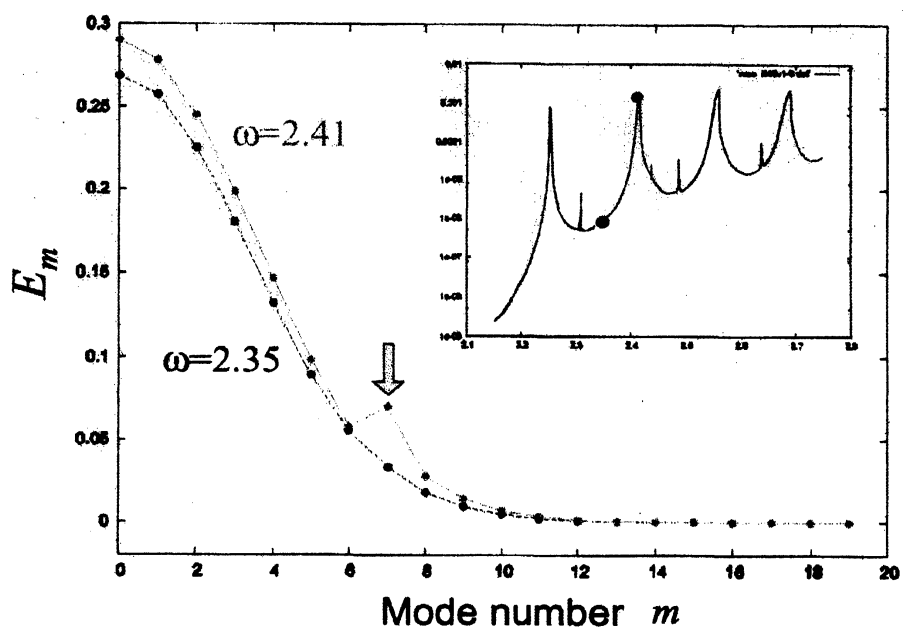


図 6: 共鳴点と非共鳴点でのモードエネルギー分布の比較 ($N = 40$, $V = 1/3$): 共鳴点 $\omega = 2.41$ (実線), 非共鳴点 $\omega = 2.35$ (破線).

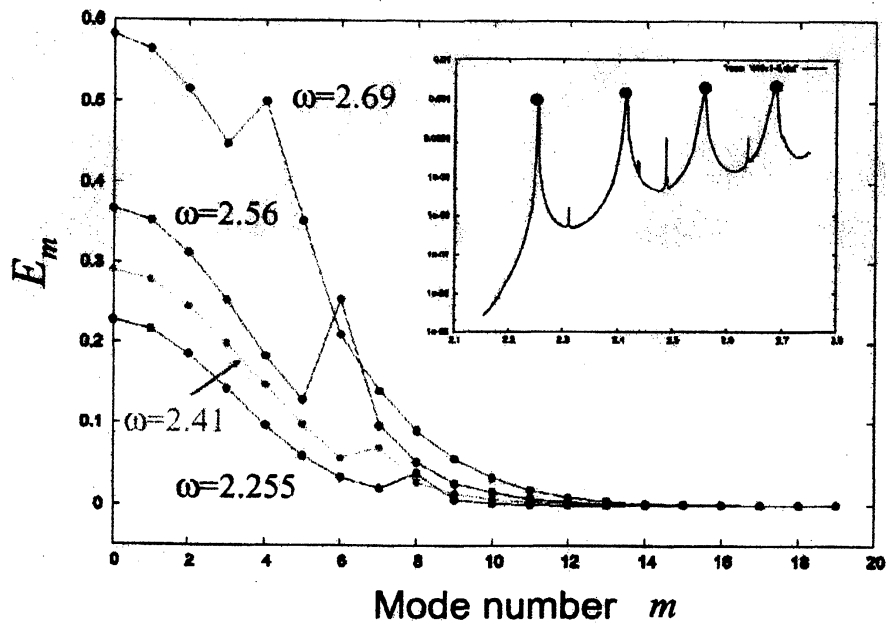


図 7: 共鳴点におけるモードエネルギー分布 ($N = 40$, $V = 1/3$).

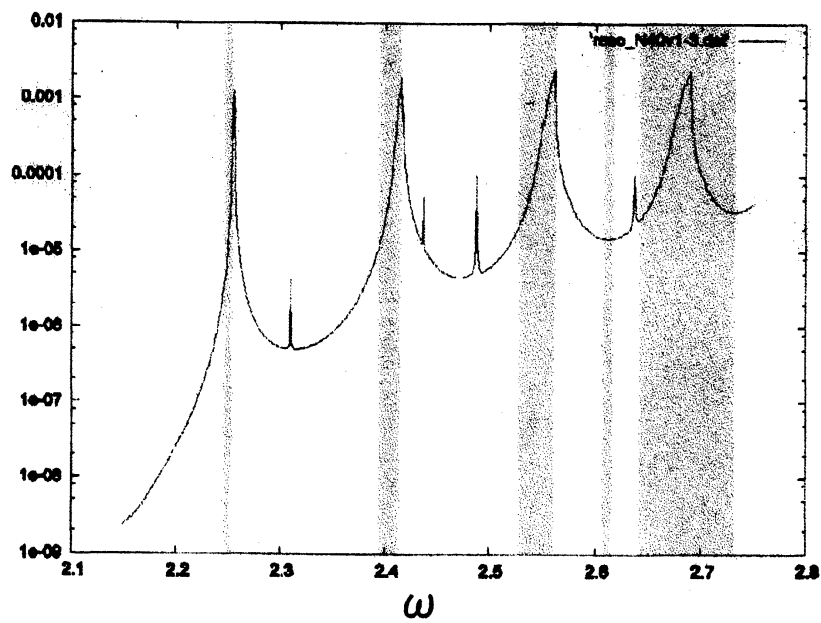


図 8: 移動型 DB の安定性 ($N = 40$, $V = 1/3$).